



CONCURSUL DOLJEAN DE MATEMATICĂ
19 martie 2016

Clasa a IX-a

1. a) Să se demonstreze că pentru $n \geq 1$, este adevărată inegalitatea:
 $3^n \geq n + 2$.
 b) Determinați funcția $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ având proprietatea:
 $(m + 3^{f(n)})$ divide $(f(m) + 3^n)$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie șirul de numere strict pozitive $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cu proprietatea:

$$x_n(x_{n-1} + x_{n+1}) < 2x_{n-1} \cdot x_{n+1}, (A)n \geq 1.$$

Arătați că: $x_0 \geq x_1$.

3. Se consideră șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ cu $a_1 = 1$, astfel încât:

$$a_{n+1} = \frac{5a_n + 3}{a_n + 3}, b_n = \frac{a_n + 1}{a_n - 3}, (A)n \geq 1.$$

 a) Calculați a_2, a_3, b_1, b_2 și b_3 .
 b) Arătați că $(b_n)_{n \geq 1}$ este progresie geometrică.
 c) Determinați termenii generali ai celor două șiruri.

4. Fie patrulaterul $ABCD$, H_1 ortocentrul triunghiului ABC și H_2 ortocentrul triunghiului DBC . Demonstrați că $ABCD$ este inscripțibil dacă și numai dacă $H_1H_2 \parallel AD$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte;
- Timp de lucru: 3 ore.